数理解析研究所講究録
316巻 1977年 48-55

2次元 normal singularity について

都立大・理　渡辺敬一

我々の考える対象は 2次元 analytic set $V \underset{\text{closed}}{\subset} G \underset{\text{open}}{\subset} \mathbb{C}^N$ の normal な singularity である。

(注). 2次元の場合 normal ⟹ (高々)孤立特異点だが逆は成立しない。

<u>例1</u>. $\{xw - yz = y^3 - x^2z = y^2w - xz^2 = yw^2 - z^3 = 0\}$ $\subset \mathbb{C}^4(x, y, z, w)$ は $(0,0,0,0)$ に於て孤立特異点をもつが，これは正規(=normal)でない。この特異点の正規化は $(0,0,0,0)$ に於て，$\mathbb{C}^5$ の中にでなければ埋め込めない．

しかし，$V = \{f = 0\} \subset \mathbb{C}^3$ のとき，又は V が局所的に完全交叉 (complete intersection) であるとき，正規 ⟺ 孤立特異点である。

2次元 normal singularity の次のような topics について述べようと思う．

1. Resolution of the Singularity ; その方法．
2. 逆に regular surface の exceptional set を "つぶして" できる特異点について．
3. 特異点の不変量及び それが小さいときの "分類"
   ("genus", "rational singularity", "elliptic singularity", Gorenstein singularity)
4. $\mathbb{C}^*$-action をもつ特異点 (= weighted homogeneous singularity) に関する精密な結果．
5. いろいろな性質をもつ特異点について (taut singularity, solvable fundamental group をもつ singularity など)

1. Resolution について.

V を2次元 analytic space, P を V の normal sing. とする.
(以後, 簡単のため, 常に P は V の唯一の 特異点 と仮定する)
$\pi : \tilde{V} \longrightarrow V$ が P の resolution とは, π は proper holomorphic map で, $\pi|_{\tilde{V}-\pi^{-1}(P)} : \tilde{V}-\pi^{-1}(P) \longrightarrow V-\{P\}$ は bi-holomorphic.
resolution は常に存在する (広中, Zariski). このとき $\pi^{-1}(P) = \bigcup_{i=1}^{n} E_i$ (E_i は irreducible projective curve) と書ける. $\bigcup_{i=1}^{n} E_i$ がどんな曲線で, $\bigcup_{i=1}^{n} E_i$ の $\tilde{V}$ への埋めこみの様子がどうなっているかによって, 特異点 P の状態がわかる. 与えられた P に対して $\tilde{V}$ を求める方法を知りたい.

ここでは Laufer の本 にある Jung (?) の方法を書いて見る.

Step 1. Cyclic Quotient Singularity の resolution.

$C_{n,q}$ を $\begin{bmatrix} e_n & 0 \\ 0 & e_n^q \end{bmatrix}$ ($e_n = \exp\left(\frac{2\pi i}{n}\right)$, n と q は互いに素)

で生成された, $GL(2,\mathbb{C})$ の subgroup とする. $C_{n,q}$ は自然に $\mathbb{C}^2$ に作用し, $\mathbb{C}^2/C_{n,q}$ は $(0,0)$ に normal singularity をもつ 2次元 analytic space となる. これを $X_{n,q}$ と書く. 一般に, $X_{n,q}$ を $\mathbb{C}^N$ の領域に埋めこんだり, その方程式を書くのはかなり面倒だが, (Riemen-schneider, [3] 参照) $X_{n,q}$ は
$\{z^n = x^{n-q}y\} \subset \mathbb{C}^3$ の 正規化 になっている.
$X_{n,q}$ の resolution を構成しよう.

$$\frac{n}{q} = k_1 - \cfrac{1}{k_2 - \cfrac{1}{k_3 - \cdots - \cfrac{1}{k_s}}}$$ と連分数展開する.

$$\left[\frac{5}{2} = 3 - \frac{1}{2}, \quad \frac{5}{4} = 2 - \cfrac{1}{2 - \cfrac{1}{2 - \cfrac{1}{2}}} \right]$$

smooth surface $M = M(k_1, \cdots, k_s)$ を次のように構成する.

$M = \bigcup_{i=0}^{s} U_i, \qquad U_i = \mathbb{C}^2(u^{(i)}, v^{(i)}) \qquad (u = u^{(0)}, v = v^{(0)}$ とおく$)$, 但し,

$U_0 \cap U_1 = \{u \neq 0\}, \quad u' = u^{-1}, \quad v' = u^{k_1} v$

$U_1 \cap U_2 = \{v' \neq 0\}, \quad v'' = v'^{-1} \quad u'' = v'^{k_2} u'$

$U_2 \cap U_3 = \{u'' \neq 0\}, \quad u''' = u''^{-1}, \quad v''' = (u'')^{k_3} v''$

$A_1 = \{v = v' = 0\}, \quad A_2 = \{u' = u'' = 0\}, \quad \cdots \quad , A = \bigcup_{i=1}^{s} A_i$

とおくと, $M = \{uv \neq 0\} \cup A \cup \{u = 0\} \cup \{u^{(s)} = 0\}$ (s: oddのとき)

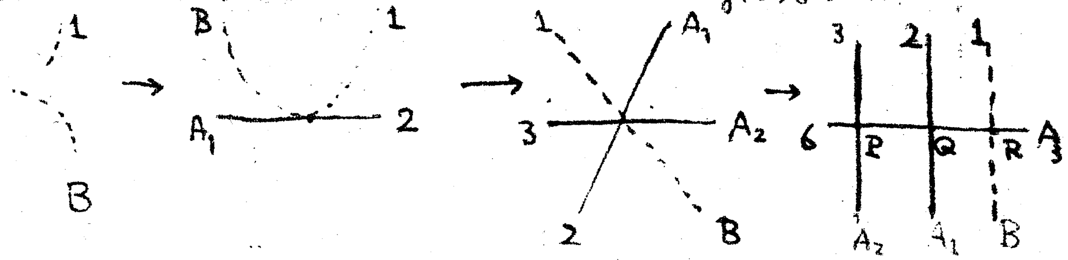
(s: evenのとき, $v^{(s)}$に代る, 以下同じ)

各 $A_i \cong \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ で, $A_i \cdot A_i = -k_i$ であり, また, (s: oddのとき)

$v^{(s)} = u^n v^q$, また, $v^{(s)}, v$ は M 全体で holomorphic な函数である.

<u>Step</u> 2 一般の場合, V は $\mathbb{C}^2$ の covering space と思える. このとき $\pi: V \to \mathbb{C}^2$ の branch locus を考える. branch locus が $x^a y^b = 0$ の形になったときは, V は $z^c = x^a y^b$ の形になっているわけだから, この場合は Step 1 に帰着できる. 従って branch locus を normal crossing しかもたない形にする訳だが, これは, (branch locus は平面曲線だから), $\mathbb{C}^2$ で一点に対する blow-up を繰り返して得られる.

例として, $z^5 = x^2 + y^3$, $z^6 = x^2 + y^3$, $z^7 = x^2 + y^3$ を考えて見よう. このとき branch locus はいずれも $x^2 + y^3 = 0$ だが, このcurveは特異点をもつ. これを normal crossing にするまでに

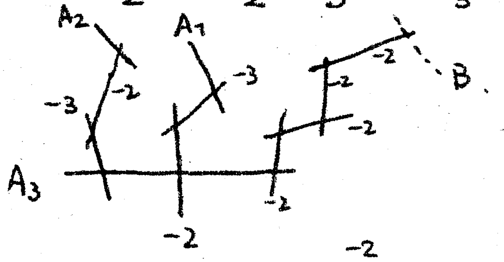


$z^5 = x^2 + y^3$.

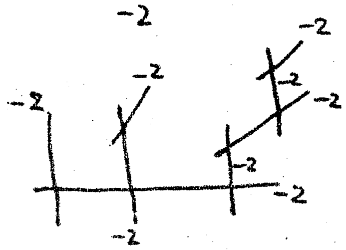
このとき，点 P, Q, R の上で resolution はそれぞれ，

$X_{5,2}$，$X_{5,3}$，$X_{5,4}$ の resolution と同じになる．

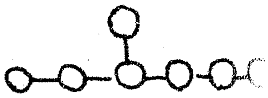
$\frac{5}{2} = 3-\frac{1}{2}$，$\frac{5}{3} = 2-\frac{1}{3}$，$\frac{5}{4} = 2-\frac{1}{2-\frac{1}{2-\frac{1}{2}}}$ より，resolutionは



となる．更に，$A_1\cdot A_1 = -1 = A_2\cdot A_2$，$A_3\cdot A_3 = -2$ がわかり，第1種例外曲線を contract すると，



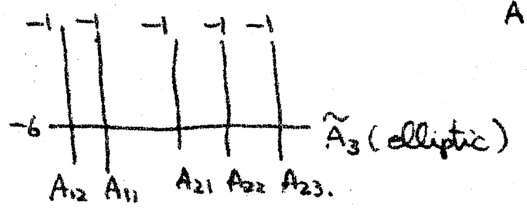
又は dual な graph で，



を得る。

$z^6 = x^2+y^3$.

このとき A_1, A_2 の逆像は可約で，それぞれ 2つ，3つの成分をもつ．
また，A_3 の逆像は elliptic curve である事がわかる．



A_{11}，A_{12}，A_{21}，A_{22}，A_{23} は contract できて，

$\frac{-1}{\text{elliptic}}$ 又は -1 [1] を得

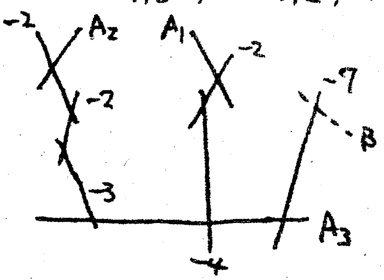
$z^7 = x^2+y^3$.

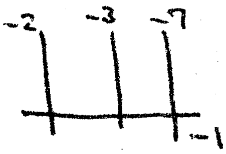
このとき，点 P, Q, R の上の resolution はそれぞれ

$X_{7,3}$，$X_{7,2}$，$X_{7,1}$ の resolution と同じである．従って

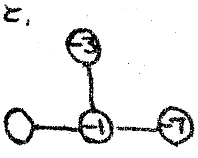
ここで $A_1^2 = A_2^2 = A_3^2 = -1$ がわかって

順次 contract して行くと，





又は



を得る．

今度は smooth な surface X の中に complete curve $E=\bigcup_{i=1}^{n} E_i$ がうめこまれている状態を考えよう. このとき, (Eは連結とする).

定理 (Brieskorn) $\exists \pi : X \longrightarrow V$, $\pi(E)=\{P\}$,

$\pi|_{X-E} : X-E \longrightarrow V-\{P\}$ は biholomorphic

$\Longleftrightarrow$ intersection matrix $(E_i\cdot E_j)_{i,j}$ が負定値.

例. C を complete smooth curve, L を C 上の line bundle, $\deg L<0$ とする. このとき L の 0-section を E とすると, $E^2=\deg L<0$ より E は一点に contract できる. このとき $\pi(E)=P$ の局所環は

$R=\bigoplus_{n\geq 0}\Gamma(C,\mathcal{O}(L^{\otimes -n}))$ (を analytic にしたもの) で得られる.

特に, C が elliptic curve, $\mathcal{O}(L)=\mathcal{O}(-x)$ (Cの点 x を定義する ideal) のとき, R は $1\in R_1$, $\wp$ ($\wp$-函数) $\in R_2$, $\wp'\in R_3$ で生成され,

$\mathcal{O}_{V,P}\cong \mathbb{C}\{X,Y,Z\}/(Z^2-4Y^3+g_2YZ^4+g_3Z^6)$

C の genus が 2以上, $\mathcal{O}(L)=\mathcal{O}(-x)$ ($x\in C$) のとき, R (又は $\mathcal{O}_{V,P}$) の構造は x に於ける "Weierstrass gap sequence" と密接な関係をもつ.

2. いくつかの不変量について.

$\mathbb{P}^2\supset C$ が degree d の既約曲線のとき, Cの種数は

$g=\dfrac{(d-1)(d-2)}{2}-\sum_{x\in C}\mu_x$ で与えられた. (μ_x は $x\in C$ の特異点に対応する不変量).

二次元 normal singularity のとき, これに対応するものは,

$p_g(\mathcal{O}_x)\overset{\mathrm{def}}{=}\dim_{\mathbb{C}} R^1\pi_*(\mathcal{O}_{\tilde V})$ (但し, $\tilde V\xrightarrow{\pi} V$ は特異点の resolution. (V が Stein のとき, $p_g(\mathcal{O}_x)=\dim H^1(\tilde V,\mathcal{O}_{\tilde V})$).

このとき $\pi:\tilde X\longrightarrow X$, $\tilde X$ が smooth のとき.

$(\dim H^2(X,\mathcal{O}_X) - \dim H^1(X,\mathcal{O}_X)) - (\dim H^2(\tilde{X},\mathcal{O}_{\tilde{X}}) - \dim H^1(\tilde{X},\mathcal{O}_{\tilde{X}}))$

$$= \sum_{x\in X} p_g(\mathcal{O}_x).$$

もう一つの invariant は，$(K_X)^2 - (K_{\tilde{X}})^2$ を言己述する（$K_X, K_{\tilde{X}}$ は $K_X, K_{\tilde{X}}$ の canonical divisor；$\mathcal{O}(K_{\tilde{X}}) = \Omega^2_{\tilde{X}}$.）

$\pi^{-1}(P) = \bigcup_{i=1}^{n} E_i$ のとき，$Z = \sum n_i E_i$ $(n_i \geqq 0)$ で，

$\dim H^1(\mathcal{O}_Z) = \dim R^1\pi_*(\mathcal{O}_{\tilde{V}}) = p_g(\mathcal{O}_P)$ なる Z のうち最小のものがある．

更に，$\mathcal{O}_P$ が Gorenstein 環となるとき，$Z = -K$（$\pi^{-1}(P)$の近くで）となる．（M. Raid）．このとき，$-Z^2 = K_X^2 - K_{\tilde{X}}^2$ となる．

また $Z_0 = \sum m_i E_i$ $(m_i \geqq 0)$ で，$\forall E_i$，$Z_0 E_i \leqq 0$ という条件を考えると，これをみたす Z_0 にも最小のものが存在する．これを fundamental cycle という．

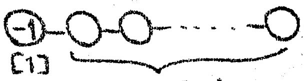
$\boxed{p_g(\mathcal{O}_P) = 0}$（P: rational singularity という）のとき，$-Z_0^2$ は $\mathcal{O}_P$ の重複度と一致する．P を埋め込める最小次元は $-Z_0^2+1$ である．

$\mathcal{O}_P$ が Gorenstein $\Longleftrightarrow$ $-Z_0^2 = 2$ で（このとき完全な分類が良く知られている）このとき，$Z = -K = 0$.

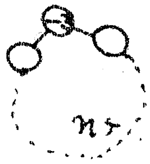
$\boxed{p_g(\mathcal{O}_P) = 1}$（P: "elliptic singularity" と呼ばれる事がある）かつ $\mathcal{O}_P$ が Gorenstein のとき，$Z_0 = Z = -K$（M. Reid）．

このとき，$k = -Z_0^2$ は P の重複度，埋め込み次元を . . 決める．

P の重複度 $= \max(k, 2)$，P の埋め込み次元 $= \max(k, 3)$.

<u>例</u>. $x^2 + y^3 + z^{6n} = 0$. グラフは 

$p_g = n$. , $k = 1$

<u>例</u>. $x^2 + (y+z^2)(y^2+z^{n+4}) = 0$. グラフは 

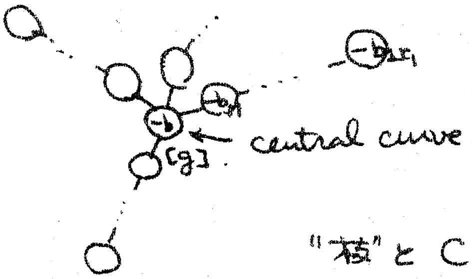
$p_g(\mathcal{O}_P) = 1$, $k = 1$.

<u>例</u>. $x^2 + \prod_{i=1}^{2g+1}(y + a_i z^2) = 0$ $(a_i \neq a_j)$.

, $p_g(\mathcal{O}_P) = g^2$.

3. $\mathbb{C}^*$-action をもつ特異点について（Pinkhamによる）.

Orlik-Wagreich [4] によって $\mathbb{C}^*$-actionをもつ特異点は調べられ, resolutionのグラフは（$\mathbb{C}^*$-actionをもつ = weighted homogeneous だが）weightだけで決まる事がわかっている. また, グラフは "star" である事もわかっている.



$\mathbb{C}^*$-actionをもつとき, 特異点は次のものによって決まる.

central curve C 及び, その conormal bundle $\mathcal{L} \overset{\text{put}}{=} \mathcal{O}(D)$,

"枝"とCの交点 $\{P_i\}_{i=1}^{n}$.

$$\frac{d_i}{e_i} = b_{i1} - \cfrac{1}{b_{i2} - \cdots - \cfrac{1}{b_{ir_i}}}$$

このときある curve C', 有限群 $G \subset \mathrm{Aut}(C')$, G-invariant な line bundle $\mathcal{L}'$ on C', があって,

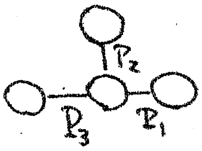
$$\mathcal{O}_P \cong \Big(\bigoplus_{n \geq 0} H^0(C', \mathcal{L}'^{\otimes n})\Big)^G \quad (\text{の analytic algebra})$$

がわかっているが, 更に, $\mathcal{O}_P$ は

$$\mathcal{O}_P \cong \bigoplus_{n \geq 0} H^0(C, \mathcal{O}(D^{(n)})), \text{ 但し, } D^{(n)} = nD - \sum_{i=1}^{n} \left\{ n \cdot \frac{e_i}{d_i} \right\} P_i$$

と書ける. 但し, $\{x\}$ $(x \in \mathbb{R})$ は x 以上の最小の整数.

例1



$P_1 = 0$, $P_2 = 1$, $P_3 = \infty$. $D = P_2 + P_3$ とすると,

$D^{(1)} = -P_1$, $H^0(\mathcal{O}(D^{(1)})) = 0$.

$D^{(2)} = P_2 + P_3 - P_1$, $H^0(\mathcal{O}(D^{(2)})) \ni x = t,\ y = \dfrac{t}{t-1}$

$D^{(3)} = -2P_1 + P_2 + P_3$, $H^0(\mathcal{O}(D^{(3)})) \ni z = \dfrac{t^2}{t-1}$

$\bigoplus_{n \geq 0} H^0(C, \mathcal{O}(D^{(n)}))$ は x, y, z で生成され, relationは,

$$z^2 = x^2(x+y).$$

References.

[1] Laufer: Normal Two-dimensional Singularities, Annals of Math. Studies. Princeton Univ. Press

[2] M. Reid: Elliptic Gorenstein Singularities of Surfaces. (Preprint).

[3] O. Riemenschneider: Deformationen von Quotient-singularitäten (nach zyklischen gruppen), Math. Ann. 209 (1974), 211~248.

[4]. Orlik-Wagreich: Singularities of algebraic surfaces with $\mathbb{C}^*$-action, Ann. of Math. 93 (1971), 205~228.

[5] H. Pinkham: Normal Surface Singularities with $\mathbb{C}^*$-action, Math. Ann. 227 (1977), 183~193.